ФИЛОСОФИЯ

УДК 165.

С.И. МАСАЛОВА

РОЛЬ АКСИОМАТИЗАЦИИ В ПРОЦЕССЕ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

Рассматривается одна из форм формализации – аксиоматизация - и ее роль в процессе построения математической теории и ее основ (абстрактных объектов математики). Аксиоматический метод применяется на этапе систематизации добытого знания и является как результатом, так и средством уплотнения математического знания.
Ключевые слова: *логический метод, формализация, аксиоматизация, аксиоматический метод, содержательная аксиоматика, полуформальная аксиоматизация, формальная аксиоматика, формальная система, исчисление, метод интерпретации.*

Введение. Математика является формализованной наукой, изучающей количественную сторону действительности с позиций высокой степени абстрактности, обобщенности. Формализация как логический метод получает математическую специфику как математическая формализация, являясь именно в конструктивном плане основополагающим методом построения математической теории, прежде всего ее основ - абстрактных объектов математики. Наиболее развитый способ формализации - аксиоматизация.
Постановка задачи. Значение аксиоматизации в развитии научного и математического знания в рамках классической рациональности очень велико. Однако роль аксиоматизации в процессе уплотнения научного и математического знания как проблема мало разработана в современной эпистемологии. Поэтому наша задача – раскрыть роль аксиоматизации не только в процессе построения математической теории, но и в уплотнении научного и математического знания.
Результаты исследования и их обсуждение. *Аксиоматизация* есть процесс построения теории при помощи аксиоматического метода. «Под аксиоматическим методом построения определенной научной дисциплины понимается такое ее построение, когда ряд положений данной области науки принимается без доказательства (входящие в них понятия являются неопределяемыми), а все остальное знание выводится из этих предложений по заранее фиксированным логическим правилам или законам» [1, 215]. Таким образом, структура аксиоматического метода представлена двумя элементами: исходными аксиомами и правилами вывода предложений (теорем) из них.

Аксиоматический метод применяется не на этапе нового знания, а на этапе систематизации уже добытого знания. Аксиоматический метод можно образно представить как метод «шлифовки» уже добытого, но еще не оформленного, не систематизированного достаточно полно знания. Однако это только одна сторона дела. В результате «шлифовки», т.е. применения аксиоматического метода, теория приобретает логическую завершенность и такую форму, которая необходимо ведет к поиску нового зна-

ния, выводит на конструирование новых математических теорий. Соответствующая функция аксиоматизации проявляется не сразу, так как она сама как метод формализации тоже развивается, т.е. аксиоматизация выступает в двух аспектах: и как результат формализации и как средство познания. Аксиоматизация как вид формализации, используется различными естественными науками. Среди нематематических наук выделяется разработанностью аксиоматического метода физика, в наибольшей степени такие ее разделы, как механика и динамика. Теоретическая биология также начинает применять аксиоматический метод (Д. Вуджер) для анализа закономерностей развития биологических систем. Математику можно считать «колыбелью» аксиоматизации, так как аксиоматический метод возник в математике, развился там до совершенства, распространился почти на все математические дисциплины и «перескочил» из математики в естествознание. В математике аксиоматизированы геометрия, арифметика, алгебра, теория множеств, топология, теория вероятностей и т.д.

Преимущества введения в математику аксиоматического метода заключаются в следующем:

1) математическое, в частности геометрическое знание (аксиоматический метод возник впервые именно в геометрии), анализировалось как целое во всей совокупности своих элементов; была осуществлена систематизация элементов и построена соответствующая ей логическая структура математической теории;

2) упорядочивание материала и выбор наиболее главного, существенного в аксиоматической системе уплотняет математическое знание, формирует неизменное, сохраняющееся, устойчивое отношение свойств абстрактных объектов математики;

3) выбор небольшого количества несводимых друг к другу аксиом характеризует свертываемость математического знания к исходным фундаментальным понятиям и принципам, т.е. минимизацию формы и средств выражения математического знания;

4) совокупность фундаментальных понятий, аксиом, принципов раскрывает специфику теории;

5) логическая простота аксиоматической теории отражает закономерности материального мира наиболее экономными логическими средствами, обладающими высокой эффективностью обобщений;

6) аксиоматический метод служит эвристическим средством познания новых закономерностей развития математического знания;

7) как способ конструирования нового знания, аксиоматический метод обладает оперативной функций;

8) аксиоматический метод имеет большую распространенность и применимость в математике.

Наибольшее развитие аксиоматический метод получил в геометрии, где в классически развитой форме аксиоматизацией пройдены три стадии: содержательная аксиоматика, полуформальная, формальная. *Содержательная аксиоматика* характеризует развитие античной геометрии, представленной в завершенной форме «Началами» Эвклида. Эвклид излагает геометрию, опираясь на ряд предложений, которые интуитивно ясно и доступно чувственному содержанию описывают определенные пространственные свойства материальных объектов и их отношения. Нам представляется важным считать интуитивную наглядность геометрических

аксиом выражением наивного материализма в математике, где, как и в философии, также шла борьба двух мировоззрений: материализма и идеализма. Вторая стадия развития аксиоматического метода: *полуформальная аксиоматизация.* Объект ее применения - неэвклидовы геометрии Лобачевского и Римана (середина XIX - конец XIX вв.). Сущность полуформальной аксиоматизации заключается в том, что логический характер умозаключений и доказательств позволяет отвлекаться от содержательной очевидности аксиом и фиксировать именно формальную сторону отношений абстрактных объектов математики, свойства которых выражаются неявными определениями. Третья стадия развития аксиоматического метода - *формальная аксиоматика,* возникшая во второй половине XIX в. Суть ее заключается в полном отвлечении от содержательной стороны аксиом и проведении логических операций, опирающихся на постулаты. Формальную аксиоматику [2] характеризуют следующие моменты: 1) точное перечисление исходных терминов и предложений; 2) понимание системы аксиомы как совокупности имплицитных определений исходных терминов; 3) строгое введение на основании правил определения всех остальных (не исходных) терминов в систему; 4) отделение построения аксиоматических систем, сводящегося к чисто формальному анализу, от ее интерпретации; 5) понимание того, что предметом аксиоматически построенной теории являются любые ее интерпретации; 6) четкое формулирование требований непротиворечивости, полноты, разрешимости и независимости и доказательство их выполнимости в определенных аксиоматических системах с помощью метода моделей. Выявление и уточнение содержания определенного научного знания при помощи формализации осуществляется путем организации его формы соответствующим образом. Конструируя объекты - знаки формальной системы, - мы фиксируем содержание в определенной форме.

Формальная система строится на аксиомах двух видов: формальных и аксиомах математической логики. Совокупность фундаментальных понятий такого рода образует формализованным язык, называемый исчислением. ***Исчисление*** - важный способ, форма выражения математического знания. Мы понимаем его как некоторую систему правил оперирования со знаками, обладающую заданными свойствами и обеспечивающую решение задач определенного класса. Структура исчисления следующая: 1) задается алфавит исходных обозначений, т.е. знаков, символов; 2) вводятся начальные слова, раскрывающие смысл производимых операций; 3) определяются правила действий над 1) и 2). В настоящее время некоторые области научного знания характеризуются большим количеством исчислений. Математика как одна из самых древних наук имеет структуру исчисления. Сначала в математике возник счет, арифметическое исчисление. Более сложными формами являются: исчисление бесконечно малых или, в современном виде, дифференциальное и интегральное исчисление; вариационное, операционное и многие другие исчисления. Математическая логика представлена исчислением высказываний, классов, предикатов, модальностей и т.д. Впрочем, не все разделы математики являлись исчислениями. Например, в классической геометрии вводились: алфавит объектов (точка, прямая, плоскость); начальные слова операций «между», «лежать» и др.; правила (построить прямые параллельными, перпендикулярными, пересекающимися, скрещивающимися) и др. Однако геометрию Эвклида, оперирующую этими понятиями, нельзя еще назвать исчислениями в завершен-

ной форме, так как определения геометрических объектов были неясны, неточны. Д.Гильберт существенно дополнил классическую геометрию группой аксиом и упорядочил систему геометрических понятий. В созданной им геометрии он осуществил замысел, состоящий в «1) формализации и представлении в аксиоматической форме наследуемой области науки; 2) в нахождении математических методов, не вызывающих сомнений, с теоретико-познавательной точки зрения; 3) в их достаточности для прямого доказательства строгости построенной системы, ее непротиворечивости» [3,217]. Благодаря этому приобретению современную геометрию можно считать исчислением, но своеобразным, отражающим пространственные формы действительности.

Как полуформальная, так и формальная аксиоматизация в качестве предмета изучения использует *интерпретацию.* Метод интерпретации позволяет выработать способы истолкования, определения исходных понятий одной системы средствами другой, уже известной системы. Интерпретация как метод познания действительности применялся математикой давно. При интерпретации первоначальных объектов математики происходит соотнесение их с реальными объектами, благодаря чему знание о них становится более содержательным. Однако такая соотнесенность имеет опосредованный характер и ограниченное число интерпретаций, вплоть до единичной, что связано со спецификой объектов определенной конкретной области. При интерпретации более высоких уровней абстрактных объектов, образующих уже систему *формализованную,* возможна целая совокупность, множество интерпретаций, среди которых выделяются математические и естественнонаучные. Одни математические структуры интерпретируются другими математическими структурами. Если реальный мир можно интерпретировать различными геометриями (Эвклида, Лобачевского, Римана и др.), отражающими различные системы пространственных форм, то одна и та же геометрическая система может иметь различные интерпретации: арифметические, геометрические. Например, можно назвать целое множество интерпретаций геометрии Лобачевского в пространстве Эвклида, использующих объекты самой различной природы: интерпретации Пуанкаре, Бельтрами - Клейна и др., и каждая из них является истинной, так как она удовлетворяет трем основным требованиям истинности системы аксиом: непротиворечивости, независимости и полноты. Причем одни интерпретации могут быть получены из других путем математических преобразований, например, интерпретация Бельтрами - Клейна из интерпретации Пуанкаре. Математические структуры интерпретируются естественнонаучными, чаще всего физическими теориями. Обладая способностью опережать развитие естествознания, математика создает системы абстрактных объектов, логические структуры, не всегда находящие содержательную интерпретацию в современном им естествознании. Методы математической гипотезы, математической экстраполяции, используемые, например, физикой, расширяют возможности математики в прогнозировании. Если основным критерием правильности естественнонаучных теорий является эксперимент, наблюдение, то математика опирается исключительно на логический критерий: непротиворечивость, строгость, полноту, минимальность системы аксиом математической теории, интерпретацию ее на проверенных практикой знаниях.

Таким образом, один из основных методов математики, лежащий в основе построения этих интерпретаций, - аксиоматический - обладает огромными возможностями изучения свойств реального мира:

- способен дать новое знание о множестве объектов, структура которых описана им;
- более высокий уровень развития системы аксиом способствует углублению наших знаний о возможностях математики в научном познании;
- отвлечение от конкретных объектов, конкретных отношений, огромная степень абстрактности и отвлеченности абстрактных объектов математики определяет огромное познавательное значение аксиоматического метода.

Наряду с достоинствами аксиоматического метода, указанными выше, следует отметить и ряд присущих ему ограничений: 1) в аксиоматике могут быть не строго и логически необоснованно введены исходные понятия, что приводит к затруднениям и даже к неточностям, ошибкам; 2) аксиоматика раскрывает сущность, содержание значения с какой-то определенной стороны, а именно, с формальной. Так как форма и содержание математического знания связаны между собой принципом параллелизма, то сущность проявляется в фиксируемой аксиоматическим методом форме; 3) масштабность применения аксиоматического метода велика, однако, невозможно построить всеобщую аксиоматическую систему, опираясь на принцип неполноты формальной системы; 4) аксиоматика - необходимый, но недостаточный метод определения сущности явлений, процессов действительности, он обязательно должен применяться в единстве с более содержательными методами научного исследования. Несмотря на ограничения, аксиоматический метод играет важную роль в развитии науки.

Научное познание можно рассматривать с разных сторон. В этом смысле интересно затронуть его малоизученную особенность: уплотнение научного знания, наиболее ярко проявляющееся в математике. Под уплотнением понимается качественное преобразование содержания научного знания, приводящее к увеличению массы знания, концентрирующегося в логической единице. Уплотнение научного знания (УНЗ) сопровождается также преобразованием языка выражения знания соответственно содержанию, называемым *минимизацией* формы знания. Смысл ее заключается в интеграции или дифференциации форм выражения знания. Уплотнение связано с диалектико-методологическим и логико-гносеологическим анализом развития научного знания, минимизация - с семиотическим анализом емкости знания.

Аксиоматический метод является результатом многоступенчатых абстракций и идеализации в отражении действительности, т.е. результатом УНЗ. Благодаря систематизации добытого ранее знания осуществляются упорядочение содержания, выделение и уточнение логической структуры развивающейся теории. Аксиоматический метод служит средством УНЗ, так как само уплотнение происходит за счет повышения информационной емкости аксиоматического метода, общности и расширения сферы применения аксиоматических методов исследования. Аксиоматический метод позволяет выделить существенные, устойчивые, фиксированные связи и отношения действительности. Эффективность его применения обусловлена удобством, точностью, строгостью, правильностью и стройностью логиче-

ских выводов, обогащением и углублением проникновения в сущность описываемых явлений.

Уплотнение научного знания достигается различными видами аксиоматизации по-разному. Так, средствами содержательной аксиоматизации еще нельзя установить логическую структуру теории, так как трудно отделить существенные свойства от несущественных. Полуформальная аксиоматика устраняет этот недостаток. В ней знание более уплотнено благодаря формулированию правил и законов логических выводов, хотя и не выраженных в явном виде. Формальная аксиоматизация добивается более высокого УНЗ, так как происходит формализация, самого процесса логического вывода. Большую роль здесь играет интерпретация как форма перехода к содержательному знанию. Знание приобретает, таким образом, благодаря уплотнению конкретно-всеобщий характер.

Развитие и обоснование аксиоматического метода характеризует логическую реализацию определенных методологических подходов в науке к УНЗ. Понимание УНЗ в рамках материалистической диалектики связано с достижением при помощи аксиоматических средств уплотнения конкретной всеобщности в познании действительности – в сочетании с содержательными научными методами. Если же происходит абсолютизация формальной стороны аксиоматического метода, выраженная формализмом Л.Гильберта, и исследователь безразличен к конкретно-содержательному «наполнению» формальной аксиоматической системы, то такое УНЗ получает абстрактный характер и не является эффективным средством познания действительности, утрачивая в ряде случаев свою исходную результативность.

Выводы. Уплотнение научного знания – характеристика восхождения от абстрактного к конкретно-всеобщему в развитии научного знания. Аксиоматизации как метод построения математической теории играет эффективную роль в уплотнении и минимизации математического знания в рамках классической рациональности. Удобство, простота, минимальность исходных понятий, вытекающие из принципов независимости аксиом (их непротиворечивости и полноты), являются внеэмпирическими критериями истинности математической теории. Там, где происходит отображение реальных отношений действительности, нет противоречивости и в самой формальной аксиоматической теории.

Уплотнение научного знания достигается за счет субординации научного знания аксиоматическим методом, выражения внутренних, закономерных связей в структуре математической теории. Этим достигаются точность и результативность применения аксиоматического метода. Там, где логические связи фиксируются неизменными стабильными понятиями, там, где наука достигает зрелости, аксиоматический метод наиболее эффективен. Этим требованиям отвечают математика и математическое естествознание. Здесь наиболее отчетливо и глубоко прослеживается единство уплотнения научного знания и минимизации форм его выражения.

Библиографический список

1. Садовский В.Н. Аксиоматический метод построения научного знания // Философские вопросы современной формальной логики. – М., 1962. – С. 215-262.
2. Сухотин А.К. Науки и информация. – М., 1971. – 127 с.
3. Принсгейм А. Ценность и мнимая не-ценность математики // Новые идеи в математике. – СПб., 1913. – Сб. № 1. – С. 15-23.

Материал поступил в редакцию 03.07.07.

S.I. MASALOVA

THE ROLE OF AXIOMATIZATION IN THE PROCESS OF MATHEMATICAL THEORY CONSTRUCTION

The article covers one of the formalization forms – axiomatization – and its role in the process of construction of mathematical theory and its foundations (abstract mathematical objects). Axiomatic method is used at the stage of systematization of acquired knowledge and is both the result and the means of mathematical knowledge consolidation.

МАСАЛОВА Светлана Ивановна, доцент кафедры философии, теологии и культурологии (1987) РГПУ. Окончила РГПУ (1968) по специальности «Математика» и аспирантуру РГПУ по специальностям «Философия» и «Философия науки» (1971).
Научные интересы: эпистемология, философия науки (математика, физика), семиотика, история религии, религиоведение.
Автор 33 научных публикаций.